## Questão 1

A autoindutância (ou simplesmente indutância) de uma bobina é igual a 0,02 $H$. A corrente que flui no indutor é dada por: $i = i_0 e^{-t/T}$, onde $T$ = 0,04 $s$ e $t$ é dado em segundos. Obtenha a expressão da f.e.m. induzida na bobina.

**Resolução:**

A força eletromotriz é dada pela relação:

$$\mathcal{E} = -L \cdot \frac{di}{dt}$$
(1.1)

Assim sendo, teremos:

$$\mathcal{E} = -L\left(-\frac{1}{T}\right) i_0 e^{-t/T}$$
(1.2)

Substituindo os dados numéricos, teremos:

$$\mathcal{E} = \frac{i_0}{2} \cdot e^{-25t}$$
(1.3)

## Questão 2

Um indutor de 0,15 $H$ é percorrido por uma corrente constante de 0,4 $A$. Desejamos que apareça nos terminais da bobina uma f.e.m. auto induzida igual a 3 $V$. O que é necessário fazer?

**Resolução:**

Utilizado a relação (1.1), teremos:

$$3 = -0{,}15 \cdot \frac{di}{dt} \therefore \frac{di}{dt} = -20\ A \cdot s^{-1}$$
(2.1)

Agora, podemos pensar em uma taxa de variação constante, dada por:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\Delta i}{\Delta t}$$
(2.2)

Assim sendo, a intensidade de corrente no indutor pode ser reduzida uniformemente de 0,4 $A$ até zero em um intervalo de tempo dado por:

$$\Delta t = \frac{0{,}4}{20} = 0{,}02\ s$$
(2.3)

## Questão 3

Um solenoide possui comprimento $a = 0{,}5\ m$, uma seção reta de área $A$ igual a 8,00 $cm^2$ e um número total de espiras $N = 400$. (a) Obtenha a expressão da indutância deste solenoide. (b) Calcule o valor de $L$.

**Resolução:**

1. A indutância é definia por:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$
(3.1)

Por sua vez, o fluxo magnético, para o solenoide em questão, é dado por:

$$\Phi_B = B \cdot A$$
(3.2)

Em que:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{a} \cdot i$$
(3.3)

Agora, reunindo (3.1), (3.2) e (3.3), teremos:

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A}{a}$$
(3.4)

2. Utilizando os dados numéricos em (3.4), teremos:

$$L = \frac{400^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8 \cdot 10^{-4}}{0{,}5}$$
$$\therefore L \cong 3{,}2 \cdot 10^{-4} H$$
(3.5)

# Questão 4

A seção reta de um toróide é um círculo de raio $R$. Seja $a$ o raio interno do toróide. Obtenha uma expressão para a indutância.

**Resolução:**

A figura 4.1 representa a seção reta do referido toróide.

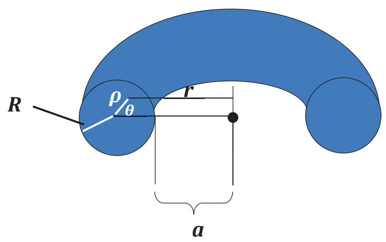


Figura 4.1

O módulo do vetor indução magnética no interior do toróide é dado por:

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$
(4.1)

O fluxo por sua vez é dado por:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$
(4.2)

Em coordenadas polares, teremos:

$$dA = \rho\, d\rho\, d\theta$$
(4.3)

Em que $r = a + R - \rho cos\theta$. Levando em consideração que o campo é perpendicular à superfície da seção reta, teremos para (4.2):

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 N i}{\pi} \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^\pi \frac{d\theta}{a + R - \rho cos\theta}$$
(4.4)

Sendo que, em (4.4) se fez necessário a multiplicação por 2 para tomar toda a seção reta.

Para a integral em $\theta$ temos:

$$\int \frac{d\theta}{p + q \cdot cos\, k\theta} = \frac{2}{k\sqrt{p^2 - q^2}} arctg\left(\sqrt{\frac{p-q}{p+q}} \cdot tg\frac{k\theta}{2}\right)$$
(4.5)

Assim, teremos:

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + R - \rho cos\theta} = \frac{2}{\sqrt{(a+R)^2 - \rho^2}} \left[arctg\left(\sqrt{\frac{a+R-\rho}{a+R+\rho}} \cdot tg\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^\pi$$
$$= \frac{2}{\sqrt{(a+R)^2 - \rho^2}} arctg\left(\sqrt{\frac{a+R-\rho}{a+R+\rho}} \cdot tg\frac{\pi}{2}\right)$$
(4.6)

Mas em (4.6), temos um argumento de tangente para $\frac{\pi}{2}$, dentro de uma função inversa da tangente. Analisando, teremos:

$$arctg\left(\sqrt{\frac{a+R-\rho}{a+R+\rho}} \cdot tg\frac{\pi}{2}\right) \to \frac{\pi}{2}$$
(4.7)

Assim, (4.4) se torna:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 N i}{\pi} \int_0^R \frac{\pi\rho}{\sqrt{(a+R)^2 - \rho^2}}\, d\rho$$
$$\Phi_B = \mu_0 N i \left[-\sqrt{(a+R)^2 - \rho^2}\right]_0^R$$
$$\therefore \Phi_B = \mu_0 N i \left[a + R - \sqrt{(a+R)^2 - R^2}\right]$$
(4.8)

Que é o fluxo no toróide. Logo, para a indutância, utilizando (3.1), teremos:

$$L = \mu_0 N^2 \left[a + R - \sqrt{(a+R)^2 - R^2}\right]$$
(4.9)

Se o solenoide da questão anterior for enrolado para formar um toróide, podemos utilizar a expressão de (4.9) para determinar a indutância. Seja $a \gg R$. Então, efetuando uma expansão em (4.9), teremos:

$$L \cong \mu_0 N^2 \left[a + R - \left(a + R - \frac{R^2}{a+R}\right)\right]$$
$$\therefore L \cong \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{2\pi(a+R)}$$
(4.10)

Em que $\pi R^2$ e $2\pi(a+R)$ são respectivamente a área da seção reta e o comprimento do solenoide.

Obs.:
1. Para (4.5) veja SPIEGEL M. R. *Manual e fórmulas e tabelas matemáticas*, McGraw Hill 1973. Rio de Janeiro – RJ. Pág. 78;

2. Para a expansão em (4.9) temos:

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} \cong 1-\frac{x}{2}$$

Também pode ser encontrada na referência da observação 1, acima.

## Questão 5

*Indutores em série e em paralelo*. Duas indutâncias $L_1$ e $L_2$ estão ligadas em série, porém separadas por uma distância muito grande. (a) Mostre que a indutância equivalente $L_{eq}$ é igual a $L_1+L_2$. (b) Por que a separação entre elas precisa ser grande? (c) Considere agora a ligação em paralelo. Mostre que a indutância equivalente, $L_{eq}$, é dada por: $\frac{1}{L_{eq}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$. Também, para esse caso, a distância entre os indutores é importante?

**Resolução:**

a) Para a associação em série, temos que:

$$i_{eq}=i_1=i_2$$
(5.1)

Em que $i_1, i_2$ e $i_{eq}$ são, respectivamente, as intensidades de correntes nas indutâncias 1, 2 e equivalente. Também, para a associação em série, temos:

$$\mathcal{E}_{eq}=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2$$
(5.2)

Em que $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_{eq}$ são respectivamente, as forças eletromotrizes nas indutâncias 1, 2 e equivalente. Agora utilizando (1.1), teremos para (5.2):

$$-L_{eq}\frac{di_{eq}}{dt}=-L_1\frac{di_1}{dt}-L_2\frac{di_2}{dt}$$
(5.3)

Utilizando (5.1), em (5.3), teremos:

$$L_{eq}=L_1+L_2$$
(5.4)

b) Um indutor pode, por meio do campo gerado pela sua corrente, interferir no outro indutor, contribuindo com outro fluxo magnético. Assim, se faz necessário que a distância seja grande para que essa interferência seja a menor possível. Caso contrário, teríamos que considerar uma indutância mútua.

c) Para a associação em paralelo, temos:

$$\mathcal{E}_{eq}=\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2$$
(5.5)

Em que $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_{eq}$ são respectivamente, as forças eletromotrizes nas indutâncias 1, 2 e equivalente. Também, teremos, para esse tipo de associação:

$$i_{eq}=i_1+i_2$$
(5.6)

Da relação (5.6) temos:

$$\frac{di_{eq}}{dt}=\frac{di_1}{dt}+\frac{di_2}{dt}$$
(5.7)

Utilizando novamente (1.1), teremos:

$$-\frac{\mathcal{E}_{eq}}{L_{eq}}=-\frac{\mathcal{E}_1}{L_1}-\frac{\mathcal{E}_2}{L_2}$$
(5.8)

Agora, utilizando (5.5) em (5.8), teremos:

$$\frac{1}{L_{eq}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$$
(5.9)

Também, para esse caso, deve-se separar os indutores com boa distância, para que o fluxo do campo de um não interfira no fluxo do outro.

## Questão 6

Dois fios iguais e paralelos, cujos centros estão separados por uma distância $d$, são percorridos por correntes iguais em sentidos opostos. Mostre que, desprezando o fluxo existente dentro dos próprios fios, a indutância relativa a um comprimento $l$ deste par de fios é dada por:

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \cdot \ln\frac{d-a}{a},$$

onde $a$ é o raio dos fios.

**Resolução:**

A figura 6.1 mostra a configuração do nosso problema.

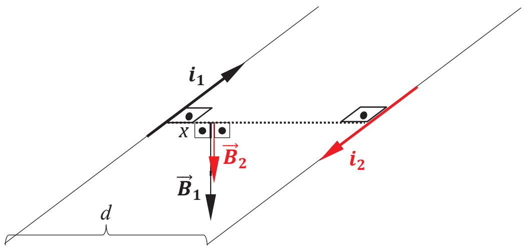


Figura 6.1

Os vetores indução se somam, em um ponto que se encontra a uma distância $x$ da corrente 1. O módulo do vetor indução resultante nesse ponto será:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)$$
(6.1)

Em que $i_1 = i_2 = i$. O fluxo magnético é dado por:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$
(6.2)

Utilizando (6.1) em (6.2), teremos:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 il}{2\pi}\int_a^{d-a}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)dx$$
(6.3)

Resolvendo a integração em (6.3), teremos:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 il}{2\pi}\left(\ln\frac{d-a}{a} - \ln d - (d-a) + \ln d - a\right)$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 il}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$
(6.4)

Utilizando a definição de indutância dada por (3.1), teremos, para a indutância:

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$
(6.5)

Em que o número de espiras $N$ é igual a 1.

## Questão 7

A corrente num circuito $LR$ atinge um terço do seu valor de equilíbrio em 3,0 s. Qual o valor da constante de tempo indutiva?

**Resolução:**

Para esse tipo de circuito, a corrente tem sua intensidade, durante a carga do indutor, dada por:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_L}}\right)$$
(7.1)

Em que $T_L = \frac{L}{R}$ é a constante de tempo indutiva. Assim, utilizando os dados numéricos em (7.1), teremos:

$$\frac{1}{3} = 1 - e^{-\frac{3}{T_L}}$$

$$\ln\frac{2}{3} = -\frac{3}{T_L} \therefore T_L = -{}^{3}\!\Big/_{\ln\frac{2}{3}}$$

(7.2)

## Questão 8

Aplica-se subitamente uma diferença de potencial de 50 $V$ aos extremos de uma bobina com $L = 20\ mH$ e $R = 180\ \Omega$. Qual a taxa de crescimento $di/dt$ da corrente após 0,001 s?

**Resolução:**

Utilizando a relação (7.1), temos:

$$i = 0{,}28\left(1 - e^{-\frac{t}{1{,}1\cdot 10^{-4}}}\right)$$
(8.1)

Em que $\frac{\mathcal{E}}{R} \cong 0{,}28\ A$ e $T_L = \frac{L}{R} \cong 1{,}1\cdot 10^{-4}\ s$. Agora tomando a taxa de variação, teremos:

$$\frac{di}{dt} = 2{,}5\cdot 10^3 \cdot e^{-\frac{10^4 t}{1{,}1}}$$
(8.2)

Em $t = 0{,}001\ s$ teremos:

$$\frac{di}{dt} \cong 2{,}2\cdot 10^7\ A\cdot s^{-1}$$
(8.3)

## Questão 9

A corrente num circuito $LR$ cai de 1,0 $A$ em $t = 0$ até 0,010 $A$ um segundo mais tarde. Sendo $L = 0{,}2\ H$, determine a resistência R do circuito.

**Resolução:**

A descarga de um indutor é dada por:

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{T_L}}$$
(9.1)

Em que $i_0$ é a intensidade de corrente no instante 0. Assim, utilizando os dados numéricos em (9.1), teremos:

$$0{,}01 = e^{-\frac{1}{T_L}}$$
$$\frac{1}{T_L} = 2\ln 10$$
$$T_L \cong 0{,}217\ s$$
(9.2)

Logo, para a resistência, teremos:

$$\therefore R \cong 0{,}921\Omega \cong 1\Omega$$
(9.3)

## Questão 10

Na figura 10.1, temos $\mathcal{E} = 100\ V$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 15\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$ e $L = 2\ H$. Determine os valores de $i_1$ e $i_2$ (a) imediatamente após $S$ ter sido fechada; (b) muito tempo depois do fechamento de $S$; (c) imediatamente após $S$ ser aberta outra vez; (d) muito tempo depois da abertura de $S$.

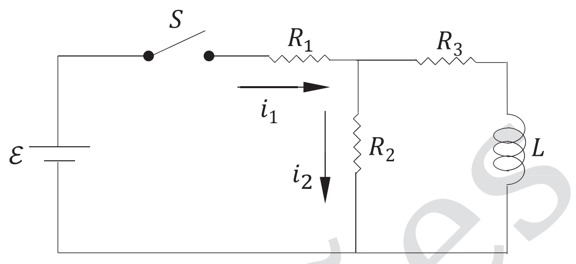


Figura 10.1

**Resolução:**

a) Imediatamente após o fechamento de $S$, o indutor começa o processo de carregamento e a intensidade de corrente em $R_3$ será nula. Logo:

$$i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{100}{25} = 4A$$
(10.1)

b) Após muito tempo depois do fechamento de $S$, o indutor já terá carga total e a corrente que se estabelece em $R_3$ será constante (corrente de equilíbrio para o indutor). Assim, teremos uma associação em paralelo de $R_2$ e $R_3$, que terá como resistência equivalente:

$$R_{eq2,3} = \frac{R_2\cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{15\cdot 30}{45} = 10\ \Omega$$
(10.2)

A resistência equivalente do circuito será:

$$R_{eq} = R_{eq2,3} + R_1 = 20\Omega$$
(10.3)

Com isso, a corrente $i_1$ será:

$$i_1 = \frac{100}{20} = 5A$$
(10.4)

A d.d.p. para a associação dos resistores $R_2$ e $R_3$ será dada por:

$$V_{2,3} = R_{eq2,3} \cdot i_1 = 10 \cdot 5 = 50\ V$$
(10.5)

Assim, a corrente 2 terá intensidade dada por:

$$i_2 = \frac{V_{2,3}}{R_2} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}\ A$$
(10.6)

c) Imediatamente após a abertura de $S$, a corrente 1 será nula, e a corrente 2 será dada pela descarga do indutor que é dada por (9.1). Sendo que a corrente de equilíbrio para o indutor será:

$$i_0 = i_1 - i_2 = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}\ A$$
(10.7)

Agora, substituindo o resultado de (10.7) em (9.1), para $t = 0$, teremos:

$$i_2 = \frac{5}{3} e^{-\frac{0}{T_L}} = \frac{5}{3}\ A$$
(10.8)

d) Para um tempo muito grande após a abertura de $S$, a corrente 1 continua com sua intensidade nula. E a corrente 2, observando (9.1), terá sua intensidade tendendo a zero, pois o indutor, para efeitos práticos não terá mais carga (energia elétrica).

## Questão 11

A f.e.m. induzida nos terminais de uma bobina é dada por $\mathcal{E} = at^2$, onde t é dado em segundos e $a = 0{,}5\ V \cdot s^{-2}$. Sabendo que $L = 0{,}04\ H$, encontre: (a) a expressão da corrente instantânea que atravessa a bobina, (b) a energia magnética produzida no instante $t = 2\ s$.

**Resolução:**

a) A força eletromotriz para o indutor é dada por (1.1). Pensando em termos da lei das malhas, teremos:

$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = 0$$
(11.1)

Assim, substituindo os dados da questão em (11.1), teremos:

$$0{,}5t^2 = 0{,}04\frac{di}{dt}$$

$$\int_0^t t^2 dt = 0{,}08 \int_0^i di \ \therefore i = \frac{t^3}{0{,}24}$$
(11.2)

b) No instante $t = 2\ s$, a intensidade de corrente, tomando o resultado de (11.2), será:

$$i = \frac{8}{0{,}24} \cong 33{,}3\ A$$
(11.3)

Assim, a energia armazenada será:

$$U = \frac{Li^2}{2} \cong \frac{0{,}04 \cdot 1{,}1 \cdot 10^3}{2}$$
$$\therefore U \cong 22\ J$$
(11.4)

## Questão 12

Move-se a chave $S$ da figura 12.1 do terminal $b$ para o terminal $a$. Mostre que após um tempo igual a uma constante de tempo indutiva (a) a energia total transformada em calor no resistor é igual a $0{,}168\,\mathcal{E}^2 T_L/R$ e que (b) a energia armazenada no campo magnético é igual a $0{,}200\,\mathcal{E}^2 T_L/R$. (c) Mostre também que o valor de equilíbrio para a energia armazenada no campo magnético é $0{,}500\,\mathcal{E}^2 T_L/R$.

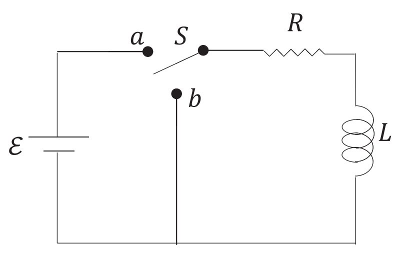

Figura 12.1

**Resolução:**

a) Ligando-se $S$ no terminal $a$, o processo de carga no indutor tem início. Assim, a intensidade de corrente no circuito será dada por (7.1). Logo, teremos para a potência dissipada no resistor:

$$P_R = Ri^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_L}}\right)^2$$
(12.1)

Lembrando que a potência é dada por:

$$P_R = \frac{dE_d}{dt}$$
(12.2)

Poderemos agora substituir (12.1) em (12.2) e integrar. Logo:

$$E_d = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^{T_L}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_L}}\right)^2 dt$$
(12.3)

Resolvendo (12.3), teremos:

$$E_d = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^{T_L}\left(1 - 2e^{-\frac{t}{T_L}} + e^{-\frac{2t}{T_L}}\right)dt$$
$$E_d = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left\{T_L + \left[2T_L e^{-\frac{t}{T_L}}\right]_0^{T_L} - \frac{T_L}{2}\left[e^{-\frac{2t}{T_L}}\right]_0^{T_L}\right\}$$
$$E_d \cong \frac{\mathcal{E}^2 T_L}{R}(1 + 0{,}736 - 2 - 0{,}0675 + 0{,}5) \cong \frac{0{,}169\mathcal{E}^2 T_L}{R}$$
(12.4)

Em que $2e^{-1} \cong 0{,}736$ e $e^{-2} \cong 0{,}135$.

b) Para a energia armazenada no campo magnético temos:

$$P_L = Li\frac{di}{dt}$$
(12.5)

Utilizando (7.1) em (12.5), teremos:

$$P_L = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left(e^{-\frac{t}{T_L}} - e^{-\frac{2t}{T_L}}\right)$$
(12.6)

Pensando em termos de (12.2):

$$E_L = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^{T_L}\left(e^{-\frac{t}{T_L}} - e^{-\frac{2t}{T_L}}\right)dt$$
(12.7)

Resolvendo a integral (12.7), teremos:

$$E_L \cong \frac{0{,}200\mathcal{E}^2 T_L}{R}$$
(12.8)

c) Para o valor de equilíbrio para a energia armazenada no indutor, podemos utilizar novamente (12.7). No entanto, devemos integrar para um tempo infinitamente grande. Assim sendo, teremos:

$$E_{Leq} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}\left(e^{-\frac{t}{T_L}} - e^{-\frac{2t}{T_L}}\right)dt$$
(12.9)

Resolvendo a integral (12.9) e tomando o limite, teremos:

$$E_{Leq} = \frac{\mathcal{E}^2 T_L}{R}\lim_{T\to\infty}\left(-e^{-\frac{T}{T_L}} + 1 + \frac{e^{-\frac{2T}{T_L}}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore E_{Leq} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathcal{E}^2 T_L}{R}$$
(12.10)

## Questão 13

Mostre que a autoindutância correspondente a um comprimento $l$ de um fio longo, associada apenas ao fluxo no interior do fio é igual a $\mu_0 l/8\pi$, independente de qual possa ser o seu diâmetro.

**Resolução:**

A densidade de corrente é dada por:

$$J = \frac{i}{\pi R^2}$$
(13.1)

Em que $R$ é o raio do fio. Utilizando a lei de Ampère, poderemos determinar a expressão do módulo do vetor indução dentro do fio. Assim sendo, teremos:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i'$$
(13.2)

Em que $i'$ é a intensidade de corrente que se encontra dentro da curva fechada, cujo contorno será o mesmo da integração. Utilizando a (13.1) e (13.2), teremos para $B$:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} \cdot r$$
(13.3)

Resultado já conhecido. A densidade de energia para o campo magnético é dada por:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$
(13.4)

Que independe da geometria do sistema. Logo, poderemos determinar a energia total armazenada no campo magnético no interior do fio. Cuja expressão é dada por:

$$U = \int u\, dV$$
(13.5)

Em que $dV$ é o elemento de volume do cilindro, que por sua vez é dado por:

$$dV = 2\pi r dr \cdot l$$
(13.6)

Agora, utilizando as expressões (13.3), (13.4) e (13.6) em (13.5) e resolvendo a integração teremos:

$$U = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi R^4} \int_0^R r^3 dr$$
$$\therefore U = \frac{\mu_0 i^2 l}{16\pi}$$
(13.7)

Podemos agora utilizar a expressão dada por (11.4). Sendo assim, teremos:

$$L = \frac{2U}{i^2} \therefore L = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$
(13.8)

## Questão 14

Um cabo coaxial longo é constituído por dois cilindros concêntricos de raios respectivamente iguais a $a = 1\, mm$, $b = 4{,}0\, mm$ e $c = 5\, mm$, em que $c$ é o raio da superfície externa do cilindro externo. O cilindro condutor interno transporta uma corrente $i = 10\, A$, sendo o circuito fechado pelo retorno da mesma corrente no sentido inverso através do cilindro externo. Calcule e compare os valores das energias magnéticas por unidade de comprimento armazenadas (a) dentro do condutor interno, (b) no espaço entre os condutores e (c) dentro do condutor externo.

**Resolução:**

a) De (13.6), temos:

$$\frac{U}{l} = \frac{\mu_0 i^2}{16\pi} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{16\pi} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\, J \cdot m^{-1}$$
(14.1)

b) Utilizando o mesmo procedimento da questão anterior, temos:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$
(14.2)

Agora, utilizando (13.4), (13.6) em (13.5), teremos:

$$U = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \therefore \frac{U}{l} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$
(14.3)

Do resultado de (14.3), teremos:

$$\frac{U}{l} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{4\pi} \cdot \ln 4 \cong 13{,}7 \cdot 10^{-6}\, J \cdot m^{-1}$$
(14.4)

c) Também, para esse caso, vamos utilizar a lei de Ampère para determinar o módulo do vetor indução magnética e em seguida utilizar os procedimentos utilizados no item anterior. Logo, teremos:

$$B_b = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(i - \frac{i(r^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)}\right)$$
$$\therefore B_b = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}\right)$$
(14.5)

Para a densidade de corrente dada por (13.4), teremos:

$$u = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}\left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}\right)^2$$
(14.6)

Utilizando (14.6) e (13.6) em (13.5), teremos:

$$\frac{U}{l} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi(c^2 - b^2)^2}\int_b^c \frac{(c^2 - r^2)^2}{r}\,dr$$
(14.7)

Resolvendo a integração, teremos:

$$\int_b^c \frac{(c^2 - r^2)^2}{r}\,dr = \int_b^c \left(\frac{c^4}{r} - 2c^2 r + r^3\right) dr$$
$$= \left[c^4 \ln r - c^2 r^2 + \frac{r^4}{4}\right]_b^c$$
(14.8)

Agora utilizando o resultado de (14.8) em (14.7), bem como os dados numéricos, teremos:

$$\frac{U}{l} \cong 0{,}81 \cdot 10^{-6}\, J \cdot m^{-1}$$
(14.9)

## Questão 15

Na figura 15.1, um fio retilíneo longo se encontra no mesmo plano que um triângulo equilátero formado com um fio de comprimento $3S$. O fio longo é paralelo a um lado do triângulo e está a uma distância de do vértice mais próximo. Qual é a indutância mútua $M$ do fio e do triângulo?

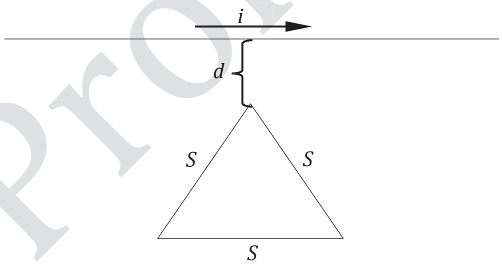

Figura 15.1

### Resolução:

Determinaremos o fluxo magnético através da espira triangular devido ao campo magnético da corrente $i$. O módulo do vetor indução magnética no vértice da espira é dado por:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$
(15.1)

Para o fluxo, utilizando (6.2), teremos:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int \frac{dA}{d + r}$$
(15.2)

Em que:

$$dA = s \cdot dr$$
(15.3)

No entanto, existe um vínculo entre as variáveis $s$ e $r$. Podemos observar da figura 15.2 que o vínculo é dado por uma semelhança de triângulo. Logo:

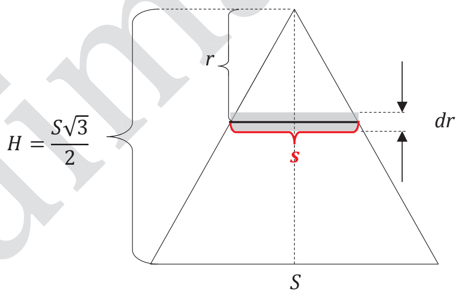

Figura 15.2

$$\frac{r}{s} = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore s = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$
(15.4)

Agora, utilizando (15.4), (15.3) em (15.2), teremos:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i\sqrt{3}}{3\pi}\int_0^H \frac{r\,dr}{r + d}$$
(15.5)

Resolvendo a integração em (15.5), teremos:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i\sqrt{3}}{3\pi}\left[r - d\ln(r + d)\right]_0^H$$
$$\therefore \Phi_B = \frac{\mu_0 i\sqrt{3}}{3\pi}\left(H + d\ln\frac{d}{H + d}\right)$$
(15.6)

Agora, da definição de indutância mútua, teremos:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B21}}{i_1}$$
(15.7)

Em que $N_2 = 1$, ou seja, uma espira triangular. $\Phi_{B21}$ é o fluxo na espira 2 devido à corrente de 1, ou seja, é dado por (15.6). Assim, utilizando (15.7), teremos:

$$M = \frac{\mu_0 \sqrt{3}}{3\pi}\left(H + d \ln \frac{d}{H+d}\right)$$
(15.8)

Em que $H$ é a altura do triângulo equilátero, ver figura 15.2.

## Questão 16

Duas bobinas cilíndricas curtas estão ligadas em série, de modo que se encontrem razoavelmente próximas uma da outra e compartilhem o mesmo eixo. (a) mostre que a indutância efetiva dessa combinação é dada por:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M.$$

(b) Qual é o significado do duplo sinal $\pm$? Será que esse sinal tem alguma coisa a ver com o sentido relativo (horário ou anti-horário) em que as bobinas estão enroladas?

**Resolução:**

a) O fluxo total nas bobinas 1 e 2 serão dados por:

$$N_1 \Phi_{T1} = N_1(\Phi_1 \pm \Phi_{12}) \text{ e } N_2 \Phi_{T2} = N_2(\Phi_2 \pm \Phi_{21})$$
(16.1)

Em que $\Phi_1$ e $\Phi_2$ são respectivamente, os fluxos próprios de cada bobina, ou seja, devido à sua própria corrente. E $\Phi_{12}$ e $\Phi_{21}$ são respectivamente o fluxo na bobina 1 devido ao campo da bobina 2 e o fluxo na bobina 2 devido ao campo da bobina 1. O sinal $\pm$ significa que o fluxo do campo de uma bobina na outra pode se somar ou subtrair. Isso vai depender da orientação dos campos produzidos por cada bobina que atravessará a outra. Se os campos forem orientados no mesmo sentido, então ocorre a soma dos campos (somam-se os fluxos). Caso contrário, subtraem-se os campos e consequentemente os fluxos. Significa que depende também dos sentidos dos enrolamentos. Assim, de (16.1), teremos para a força eletromotriz em cada bobina:

$$\mathcal{E}_1 = -(L_1 \pm M)\frac{di}{dt} \text{ e } \mathcal{E}_2 = -(L_2 \pm M)\frac{di}{dt}$$
(16.2)

Em que $i_1 = i_2 = i$ (associação em série) e $N\Phi = Li$ (definição de autoindutância). Para uma associação em série, temos:

$$\mathcal{E}_{eq} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$
(16.3)

Sendo que $\mathcal{E}_{eq} = -L_{eq}\frac{di}{dt}$. Assim, substituindo em (16.3), teremos:

$$-L_{eq}\frac{di}{dt} = -(L_1 \pm M)\frac{di}{dt} - (L_2 \pm M)\frac{di}{dt}$$
$$\therefore L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$$
(16.4)

b) Vide resolução do item a.

Para uma ligação em paralelo, teremos algo semelhante ao que foi feito para a ligação em série. No entanto, para uma ligação em paralelo, teremos:

$$i = i_1 + i_2$$
(16.5)

E também, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$. Para as forças eletromotrizes, teremos:

$$\mathcal{E}_1 = -L_1\frac{di_1}{dt} \mp M\frac{di_2}{dt} \text{ e } \mathcal{E}_2 = -L_2\frac{di_2}{dt} \mp M\frac{di_1}{dt}$$
(16.6)

De (16.5), teremos:

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$$
(16.7)

Agora, utilizando (16.6) em (16.7), teremos:

$$\frac{\mathcal{E}}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1}\left(\mathcal{E}_1 \pm M\frac{di_2}{dt}\right)\frac{1}{L_2}\left(\mathcal{E}_2 \pm M\frac{di_1}{dt}\right)$$
(16.8)

Em que $\frac{di}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{L_{eq}}$. Manipulando (16.8), teremos:

$$\frac{\mathcal{E}}{L_{eq}} = \frac{\mathcal{E}}{L_1} + \frac{\mathcal{E}}{L_2} \pm \frac{M}{L_1} \cdot \frac{di_2}{dt} \pm \frac{M}{L_2} \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$\frac{\mathcal{E}}{L_{eq}} = \frac{\mathcal{E}}{L_1} + \frac{\mathcal{E}}{L_2} \pm \frac{M}{L_1 L_2}\left(L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}\right)$$

(16.9)

Ainda, utilizando (16.6), teremos:

$$\frac{\mathcal{E}}{L_{eq}} = \frac{\mathcal{E}}{L_1} + \frac{\mathcal{E}}{L_2} \pm \frac{M}{L_1 L_2}\left(-2\mathcal{E} \mp M\left(-\frac{\mathcal{E}}{L_{eq}}\right)\right)$$

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \mp \frac{2M}{L_1 L_2} + \frac{M^2}{L_{eq} L_1 L_2}$$

$$\frac{1}{L_{eq}}\left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \mp \frac{2M}{L_1 L_2}$$

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{L_1 + L_2 \mp 2M}{L_1 L_2 - M^2} \therefore L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$$

(16.10)